MATHÉMATIQUES

DeltA

MANUEL

A. Bijnaru-Popa

M. Genard

E. Gillet

Plantyn

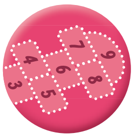
4e

Présentation du manuel

Tout d'abord, bienvenue en 4G et félicitations !

Si tu tiens ce livre entre tes mains, c'est que tu as réussi ta 3e !
Tu as donc acquis toute une série d'outils que nous allons utiliser dans différents chapitres.
En effet, les mathématiques sont comme une maison que tu construis. En primaire et au premier degré, tu as fabriqué les briques et le ciment, en 3e, tu as posé les fondations de ta maison.
À présent, pour avoir un édifice solide, nous allons construire une belle maison sur les fondations réalisées en 3e .

Pour rendre ces différents apprentissages plus clairs pour toi, nous avons divisé chacun des chapitres en 11 parties.
Voici l'explication de chacune d'elles :



1. Parcours d'apprentissage

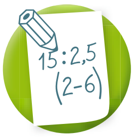
Dans celui-ci, nous avons voulu te situer dans ton apprentissage.
D'un côté, tu verras les notions à partir desquelles nous allons travailler, et que tu as déjà développées les années précédentes.
Ensuite seront exposées toutes les compétences visées par le chapitre… ce qu'il te faudra savoir en fin de chapitre, les prescrits légaux et communs à tous… ce sur quoi ton professeur pourra t'interroger.
Et pour finir, tu verras à quoi ces nouveaux acquis te seront utiles dans le futur… proche ou lointain.

2. Tâche de compétence cible

Nous avons ensuite voulu commencer par une tâche que tu devras être capable de résoudre à la fin du chapitre. Pour que tu saches ce que tu arriveras à faire quand tu auras découvert toutes les notions que recouvre chacun des chapitres. Pas de panique si tu n'arrives pas à la réaliser au début du chapitre !

3. Prérequis

Ici, tu trouveras quelques exercices que tu as déjà vus au cours des années précédentes, mais qui sont nécessaires pour aborder sereinement la matière de 4e. En les effectuant, tu te rendras compte de tes difficultés éventuelles, et des lacunes que tu devras éventuellement combler pour ne pas rencontrer de problèmes dans ton apprentissage de 4e. Tu pourras ainsi refaire des exercices de tel ou tel type pour aborder plus à l'aise les nouveaux chapitres.



4. Les exercices

Ceux-ci sont divisés en modules, qui ont des liens les uns avec les autres.
Dans chaque module, tu trouveras trois parties.

Activités de questionnement ?

Des exercices qui, comme le nom l'indique, te questionneront et te permettront de découvrir de nouvelles notions.

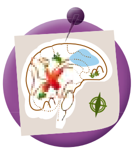
Faisons le point

« J'entends et j'oublie, je vois et je me souviens, je fais et je comprends », Confucius, 551 av. J.-C. Ici, nous te poserons des questions pour t'aider à formaliser les notions que tu auras découvertes. Nous n'allons pas y mettre la théorie complétée… En effet, il nous a semblé indispensable de te pousser à l'autonomie en te faisant réfléchir sur la théorie découverte et en essayant de la formaliser toi-même.
Tu éprouveras peut-être quelques difficultés à te familiariser à la « fabrication » de résumés, mais nous espérons que, petit à petit, tu parviendras à faire toi-même les résumés du cours de 4e.

Pas d'inquiétude, nous avons également placé toute la théorie en fin de manuel…

Exercices d'application

Après avoir découvert et formalisé la théorie, il est évidemment logique de faire quelques exercices…



5. Carte du chapitre

Nous avons voulu utiliser une technique un peu différente pour t'aider à faire des résumés. Tu auras vu la théorie propre à chaque module séparément. Il est ensuite nécessaire d'avoir une vue d'ensemble de tout le chapitre avant d'aborder des exercices un peu plus complexes. Cette manière de faire te permet d'avoir cette vue.
Tu devrais être capable de réaliser toi-même la carte, après avoir vu toute la théorie du chapitre.

6. Ai-je bien compris ?

Après avoir fait le mind mapping, et donc avoir eu une vue d'ensemble de toute la théorie du chapitre, nous te poserons quelques questions pour vérifier tes connaissances… Cela te permettra de te situer et de savoir si tu as bien acquis les notions théoriques du chapitre.

7. Utilisons tes ressources pour travailler des compétences

Et maintenant que tu as découvert, formalisé et utilisé les nouvelles notions de chaque module, et que tu as assimilé la théorie globale du chapitre, il est temps de voir si tu peux utiliser correctement toute cette théorie dans les exercices…
Certains qualifient les exercices suivants de « tâches complexes ». Tu dois savoir qu'« une tâche est complexe si elle combine des éléments que l'élève connaît, maîtrise et a déjà utilisé plusieurs fois mais de façon séparée, dans un autre ordre ou dans un autre contexte ».[1]
En effet, les exercices que tu as réalisés jusqu'à présent ne faisaient appel qu'à une compétence pour la plupart d'entre eux tandis que, maintenant, diverses compétences seront sollicitées.
De plus en plus, dans ce livre, nous allons tenter d'ouvrir plusieurs tiroirs, nous travaillerons en spirale, c'est-à-dire que nous ferons, autant que faire se peut, appel aux chapitres précédents à tout moment. En effet, quel est l'intérêt de comprendre et de savoir appliquer les outils que nous t'avons donnés si tu ne sais pas QUAND tu dois les utiliser ?!
Ne te dis pas que ça va être compliqué, ces tâches ne sont complexes que parce qu'elles font intervenir plusieurs notions… mais elles ne sont pas compliquées, et tu es tout à fait capable de les réaliser. Pense à chaque fois à te situer dans la matière. De quels outils as-tu besoin pour résoudre tel ou tel problème ? Quand tu as trouvé l'outil, prends le temps de te souvenir de la théorie et ensuite résous l'exercice.

Après avoir réalisé ces exercices de compétences, tu seras capable de résoudre la tâche de compétence cible ! Reviens au début du chapitre et rends-toi compte que cet énoncé qui te paraissait très compliqué ne l'est pas tant que cela !

8. Maths sans frontières

Sache que tu n'es pas le seul à étudier les mathématiques… Dans cette rubrique, nous avons voulu te montrer des exemples de concours de mathématiques. Tu y trouveras 5 exercices par chapitre, de sources différentes :

- Olympiades mathématiques belges : concours bien connu, organisé par la Société belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française (SBPMef).
- Université catholique de Louvain : examen d'admission aux études d'ingénieur civil.
- Ecole Royale Militaire : examen d'admission.
- PréExpo 2008 – UCL : cours préparatoires aux examens d'admission organisés pas UCL.
- Université de Liège – Faculté des Sciences Appliquées : examen d'admission.
- Facultés universitaires Saint-Louis : exercices de statistique descriptive.
- Cours et exercices – statistique descriptive – Books on demand, édition 2010.
- www.laroche.lycee.free.fr
- www.lycee.ac-rouen

9. La petite gazette

Pas de longs discours mathématiques, juste des anecdotes, des utilisations, un peu d'histoire, de quoi rendre les mathématiques plus concrètes.

10. Je prépare mon évaluation

Nous avons tenu à terminer chacun des chapitres par une évaluation formative. Une évaluation formative est une évaluation qui a pour intérêt de situer ton apprentissage, tes découvertes, tes lacunes. Les points ne sont là que pour te permettre de savoir où tu en es, te dire que tu dois encore revoir tel ou tel point pour réussir la « vraie » interrogation (qui s'appelle alors une évaluation sommative ou certificative).

11. Exercices complémentaires

Ici se trouvent des exercices en plus, à faire ou pas, suivant ton niveau, tes difficultés, ton envie… et l'envie de ton enseignant ;-)

Libre **Matière spécifique à l'enseignement libre**

Officiel **Matière spécifique à l'enseignement officiel**

1 http://ww2.ac-poitiers.fr/apprend/spip.php?article69, consulté le 15/12/11.

1. PARCOURS D'APPRENTISSAGE

Ensuite, je poursuivrai...

Tu auras découvert comment déterminer l'intersection de deux lieux de base, établir les équations cartésiennes de la médiatrice d'un segment, d'un cercle et d'une parabole pour continuer en 6e avec l'étude d'autres lieux géométriques : les coniques.

Maintenant, je vais apprendre à …

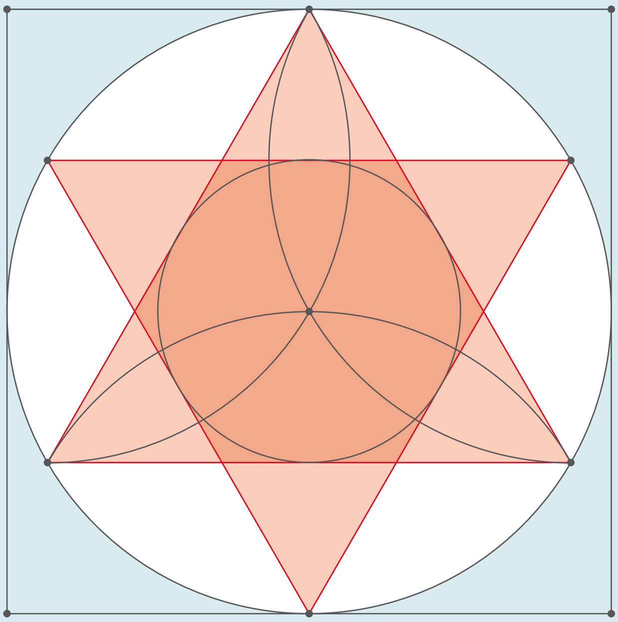
- ❑ utiliser les lieux de base et les propriétés connues pour effectuer une construction ou rechercher un lieu ;
- ❑ discerner, dans une recherche de lieu, ce qui est mobile de ce qui reste fixe ;
- ❑ établir dans des cas numériques les équations de la médiatrice d'un segment donné, du cercle de centre et de rayon donnés, de la parabole de foyer et de directrice parallèle à Ox donnés.

Je mobilise ce que je sais déjà...

Tu utiliseras les notions de distance entre deux points, de distance d'un point à une droite ; les notions de hauteurs, de médianes, de bissectrices, de médiatrices d'un triangle ainsi que les figures géométriques et leurs propriétés, les figures semblables, le théorème de Pythagore, les cas d'isométrie et de similitude et les transformations du plan.

2. TÂCHE DE COMPÉTENCE CIBLE

À Bruxelles, l'architecte Victor Horta (1861-1947), chef de file incontesté des architectes de l'Art nouveau, avait voulu construire la façade d'un bâtiment en verre et en béton en utilisant le dessin ci-dessous.



Pour que les plans de travail puissent être faits, son assistant devait trouver les longueurs des courbes que le maître avait utilisées.
Si tu avais été son assistant, combien de courbes aurais-tu trouvées sur le dessin ?
Quelles sont leurs longueurs si le côté du carré extérieur mesure 10 m?

3. PRÉREQUIS

1. **Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points A(1;1) et B(4;4).**
   Détermine la distance entre les points A et B.

2. **On donne un angle $\widehat{AOB}$ d'amplitude 60°. Construis la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.**

3. **Construis le cercle inscrit dans un triangle quelconque ABC.**

4. **Construis la médiatrice d'un segment [AB].**

5. **Construis le cercle circonscrit au triangle quelconque ABC.**

Module 1 : La médiatrice d'un segment

? ACTIVITÉS DE QUESTIONNEMENT

Au parc aquatique « Aquafun », il existe deux piscines, situées à 50 mètres l'une de l'autre. Pour renforcer la sécurité des nageurs, la direction a engagé un nouveau maître-nageur.

Quel doit être son parcours, entre les deux bassins (considérés comme des points), pour qu'il soit toujours à la même distance des piscines ?

FAISONS LE POINT

299 Théorie

1. **Cite la définition de la médiatrice d'un segment.**
2. **Quelle propriété vérifie tous les points appartenant à la médiatrice d'un segment ?**
3. **Comment construit-on la médiatrice d'un segment ?**

EXERCICES D'APPLICATION

1. Détermine l'équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB] si on connaît les coordonnées des extrémités du segment :

1. A(3;1), B(–3;1)
2. A(–2;2), B(2;–2)
3. A(3;2), B(3,–2)

2. Détermine les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC si on connaît les coordonnées des sommets du triangle :

1. A(0;$\sqrt{3}$), B(–$\sqrt{3}$;0), C($\sqrt{3}$;0)
2. A(–2;1), B(0;–2$\sqrt{2}$ – 1), C(2;1)

Module 2 : Le cercle – arc capable d'un angle donné

? ACTIVITÉS DE QUESTIONNEMENT

Un metteur en scène dispose de spots qui peuvent éclairer sous un angle de 60°. Chaque spot éclaire la scène sur toute sa largeur.

Où doit-il les placer s'il veut éclairer une scène de 10 mètres de large ?

Représente la scène à l'échelle par un segment [AB] de 5 cm.

FAISONS LE POINT

301 Théorie

1. **Cite la définition du cercle de centre C et de rayon r.**
2. **Quel lien existe-t-il entre l'amplitude d'un angle inscrit dans un cercle et la mesure de l'arc de cercle qu'il intercepte ?**
3. **Quel lien existe-t-il entre l'amplitude d'un angle au centre et la mesure de l'arc qu'il intercepte ?**

EXERCICES D'APPLICATION

1. **Détermine l'équation du cercle de centre C(2;3) si on sait que :**
   1. la longueur du rayon du cercle est 4
   2. il est tangent à l'axe Ox du repère
   3. il est tangent à l'axe Oy du repère
   4. il est tangent à la droite d'équation $x = 6$
   5. il est tangent à la droite d'équation $y = -2$
2. **Trouve les coordonnées du centre et la longueur du rayon pour chacun des cercles suivants :**
   1. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
   2. $x^2 + y^2 = 25$
   3. $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$
   4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
   5. $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$
3. **Détermine l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC, sachant que :**
   1. A(2;0), B(0;2), C(4;0)
   2. A(3;1), B(1;–1), C(–3;3)
   3. A$(0;\sqrt{3})$, B$(-\sqrt{3};0)$, C$(\sqrt{3};0)$

4. **On considère le cercle de centre C(3;5) et de rayon 5. Détermine algébriquement l'intersection du cercle avec les droites suivantes :**

    1. $a \equiv y = 5$
    2. l'axe Ox
    3. l'axe Oy
    4. $b \equiv x + y = 0$
    5. $d \equiv 4x - 3y + 3 = 0$

5. **Construis le lieu géométrique des points d'où un segment [MN] de 5 cm est vu sous un angle de :**

    1. 45°
    2. 90°
    3. 120°

Module 3 : La parabole

? ACTIVITÉS DE QUESTIONNEMENT

Un beau chêne bicentenaire (le point F) est situé à 20 mètres d'un mur d'enceinte d'un parc (la droite d).

Le jardinier voudrait construire un chemin de telle manière qu'un promeneur soit toujours à égale distance de l'arbre et du mur.

Trace le chemin sur le plan ci-dessous à la règle et au compas.

F (l'arbre)

d(le mur)

FAISONS LE POINT

303 Théorie

1. **Quelle propriété vérifie tous les points appartenant à une parabole ?**
2. **Où se trouve le sommet de la parabole ?**
3. **Explique comment on construit une parabole de foyer et de directrice donnés.**

EXERCICES D'APPLICATION

1. Détermine les équations des paraboles de sommet O(0;0) et de foyer :

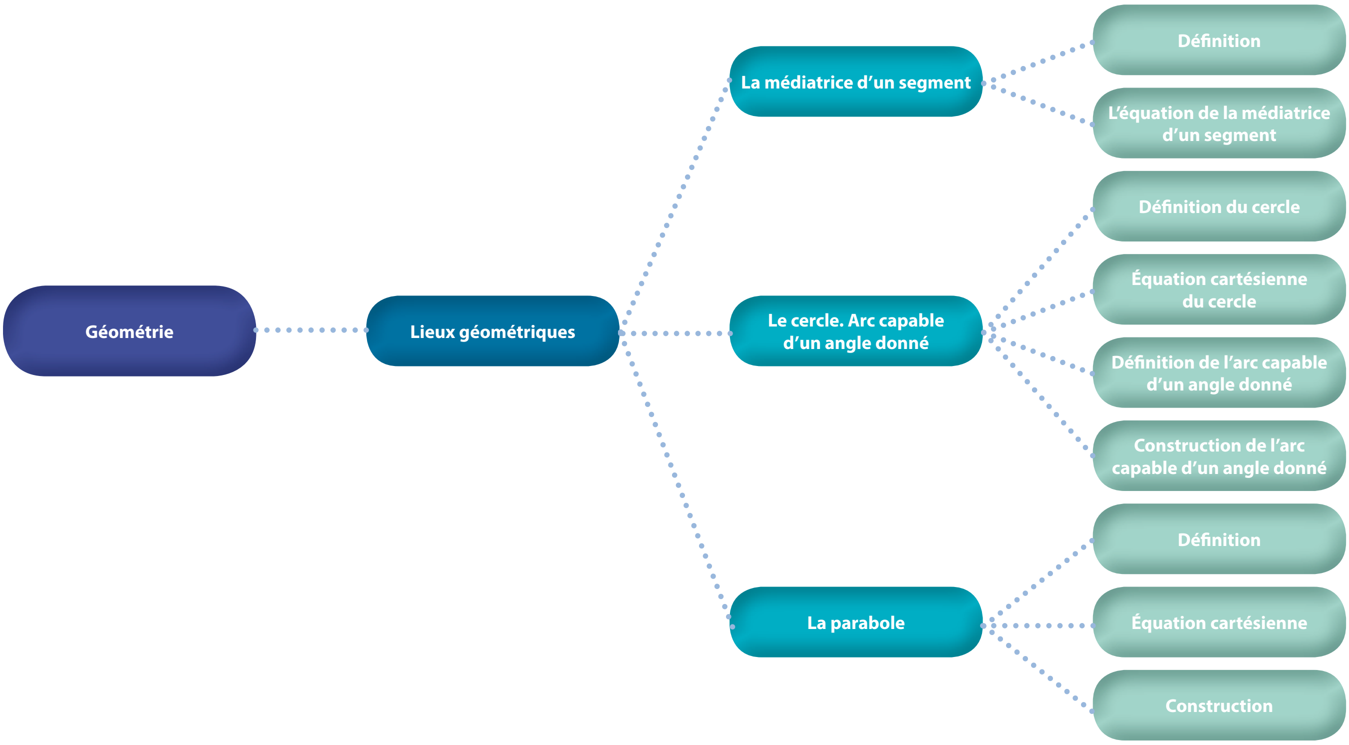
1. F(0;2)
2. $F\left(0;\frac{1}{2}\right)$
3. $F(0;\sqrt{2})$

Détermine l'équation de la directrice et les coordonnées de trois points qui appartiennent à chacune des paraboles.

2. Recherche les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice des paraboles d'équations :

1. $P_1 \equiv y = \frac{x^2}{4}$
2. $P_2 \equiv y = 4x^2$
3. $P_3 \equiv y = -x^2$
4. $P_4 \equiv y = 3x^2$
5. $P_5 \equiv y = -\sqrt{2}x^2$

5. CARTE DU CHAPITRE



6. AI-JE BIEN COMPRIS ?

Tu as à présent vu toute la théorie de ce chapitre…
La connais-tu ?

1. **Cite les définitions :**
    1. de la médiatrice d'un segment :
    2. du cercle :
    3. de l'arc capable d'un angle donné :
    4. de la parabole :
2. **Vrai ou faux ? Justifie !**
    1. Le centre du cercle inscrit au triangle est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle.
    2. L'arc capable d'un angle de 90° est un demi-cercle.
    3. Le foyer de la parabole d'équation $P \equiv y = x^2$ est le point de coordonnées (0;1).

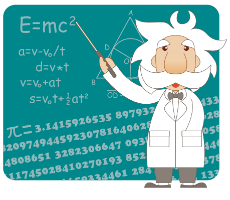
7. Utilisons tes ressources pour travailler tes compétences

1. **Précise si chacune des équations cartésiennes qui suivent est celle d'une droite, d'un cercle ou d'une parabole. Donne les caractéristiques de ces lieux.**
    1. $y = 9x^2$
    2. $2y - 3x + 5 = 0$
    3. $y^2 + x^2 - 2x - 15 = 0$
    4. $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$
    5. $4x^2 - y = 0$
    6. $2x^2 - 5y = 0$
2. **Construis le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit un segment de 5 cm sous un angle de 90°. Précise quels sont les éléments mobiles et quels sont les éléments fixes.**
3. **Détermine le lieu géométrique du centre du cercle tangent aux côtés d'un angle de 60°. Précise quels sont les éléments fixes et quels sont les éléments mobiles.**
4. **Détermine le lieu du centre de gravité d'un triangle ABC dont le côté [AB] est fixe et la longueur de la médiane [CM] mesure 9 cm.**

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes du triangle ; il se trouve sur chaque médiane, à la distance du sommet égale aux 2/3 de la longueur de la médiane.

Tu es à présent capable de résoudre la tâche cible !

Tâche 144



1. Université de Liège – 2002

On considère un triangle ABC. On note H son orthocentre et F le pied de la hauteur issue de A. Par B, on mène une droite d, par C, on mène une droite e, perpendiculaire à d. La parallèle à d passant par A coupe e en E ; la parallèle à e passant par H coupe d en D.

a) Montre que les points A, E, F et C sont ***cocycliques*** *(ils appartiennent à un même cercle).*

b) Montre de même que les points H, D, F et B sont cocycliques.

2. École royale militaire – Bruxelles - Examen d'admission – 2001

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points O, A et D : O(0;0), A(3;1) et D(2;-4).

On demande :

a) de déterminer les coordonnées du point B tel que $\overline{OA} = \overline{OB}$*, que l'angle* $\widehat{BOA} = 45°$ *et que l'ordonnée de B est positive ;*

b) de déterminer les coordonnées du point C appartenant à la médiatrice du segment [AD] et à la bissectrice du deuxième et du quatrième quadrant ;

c) de calculer les coordonnées du centre M ainsi que le rayon r du cercle C passant par les points O, A et D et puis d'écrire une équation de ce cercle.

3. *Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A(2;6), B(0;2) et C(6;2).*

On demande :

a) de déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC ;

b) de déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

c) de déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC ;

d) de démontrer que les trois points (le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC) sont alignés ;

e) de déterminer l'équation de ***la droite d'Euler*** *(la droite qui contient le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle).*

La petite gazette

Léonard Euler (1707-1783)

Le Suisse Euler a été l'un des plus éminents mathématiciens de tous les temps. Il était si doué que même après être devenu aveugle, sa mémoire et ses capacités phénoménales pour le calcul mental lui permirent de continuer à travailler jusqu'à sa mort, plus de vingt ans plus tard.

Ayant épousé une Russe, il vécut essentiellement à Saint-Pétersbourg où il publia trente volumes de mathématiques, trente-deux de mécanique et d'astronomie et douze de physique.

Euler fut celui qui baptisa définitivement le nombre pi de la lettre grecque π ; il introduisit également d'autres notations, telles que f(x) pour les fonctions de la variable x, i pour l'unité imaginaire, la constante e et le symbole de la somme $\sum$.

Ses contributions sont innombrables et ont marqué de façon impérissable les domaines du calcul infinitésimal, des fonctions, de la théorie des graphes, de la physique et de l'astronomie. Un astéroïde porte son nom.

Il est difficile de dégager l'essentiel de son œuvre car tout y est important : signalons sa théorie sur le mouvement de la Lune, la plus connue à cette époque, sa théorie ondulatoire de la lumière et les équations générales de l'hydrodynamique. Il étudie en détail les fonctions exponentielles et logarithmiques en trouvant la seule relation mathématique qui lie les

Léonard Euler

cinq nombres les plus connus des mathématiques : 0, 1, e, i et π.

$e^{i\pi} + 1 = 0$ (la formule d'Euler)

Il a redonné de l'élan aux travaux de Fermat sur la théorie des nombres et préparé la voie à de nombreux résultats démontrés ou généralisés par Lagrange.

(Joaquin Navarro – Les Secrets du nombre π – Le monde est mathématique)

JE PRÉPARE MON ÉVALUATION

1. **Détermine une équation cartésienne du lieu géométrique des points du plan situés à égale distance du point F(0;2) et de la droite $y \equiv -2$.**

2. **Trouve les coordonnées du centre et le rayon du cercle dont on donne l'équation :**

$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 9 = 0.$

3. **Détermine le centre du cercle circonscrit au triangle ABC sachant que, dans un repère orthonormé, A(0;2), B(6;0) et C(0;6).**

4. **Construis le lieu géométrique des points d'où un segment de 6 cm est vu sous un angle de 135°.**

5. **Un câble qui doit traverser des autoroutes à une hauteur minimale de 2 mètres épouse la forme d'une parabole. Les piquets qui le soutiennent sont fixés d'un côté et de l'autre de l'autoroute. Sachant que pour une autoroute de 8 mètres de large, la hauteur d'un pylône de soutien est de 4 mètres, quelle devrait être la hauteur d'un piquet de soutien si l'autoroute mesurait 10 mètres de large ?**

EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

1. **Recherche l'intersection de la parabole et de la droite dont on donne les équations :**

1. $P \equiv y = x^2 - 4x + 4$ — $d \equiv 3y - x = 0$
2. $P \equiv y = -x^2 + 4x + 12$ — $d \equiv 2x + y - 12 = 0$
3. $P \equiv y = x^2 - 2x + 3$ — $d \equiv y + 4x - 2 = 0$
4. $P \equiv y = x^2 - 2$ — $d \equiv 3x - 4y - 1 = 0$
5. $P \equiv 3y = x^2$ — $d \equiv 4x - 3y = 2$

2. **On donne la parabole d'équation $P \equiv y = x^2 - 3$. Détermine r et s pour que les droites $a \equiv y = 2x - 2r$ et $b \equiv y + (s - 1)x + 7 = 0$ soient tangentes à cette parabole. Détermine chaque fois les coordonnées du point de contact.**

3. **Trace la parabole d'équation $4y = x^2$ et discute le nombre des points d'intersection avec la droite d'équation $y = 2x + p$.**

4. **Sachant que dans un repère orthonormé, les sommets d'un triangle ont les coordonnées A(0;2), B(6;0) et C(0;6), détermine les coordonnées des points d'intersection du cercle circonscrit au triangle avec la première bissectrice du même repère orthonormé.**

Tu trouveras des exercices supplémentaires sur les lieux géométriques dans le chapitre 9, « Pour suivre… », tâche 2, tâche 3 et tâche 4.

Module 1 : La médiatrice d'un segment

Définitions

La **médiatrice d'un segment** est la droite perpendiculaire à ce segment, passant par son milieu.

Un **lieu géométrique** est un ensemble de points qui ont une même propriété appelée **propriété caractéristique**.

Remarque

La propriété vue en 2e, « tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment », peut être formulée maintenant en utilisant la définition d'un lieu géométrique :

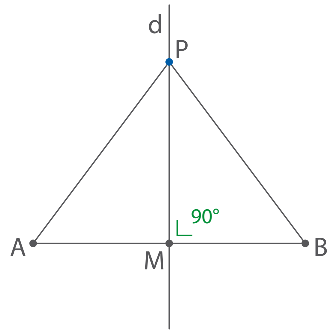
La médiatrice d'un segment est le lieu des points du plan équidistants des extrémités du segment.

Hypothèse

$d \perp [AB]$
$M \in [AB]$: $\overline{AM} = \overline{MB}$
$P \in d$

Thèse

$\overline{PA} = \overline{PB}$



Démonstration

ΔPMA et ΔPMB sont isométriques (C.A.C.), car

$\overline{AM} = \overline{MB}$

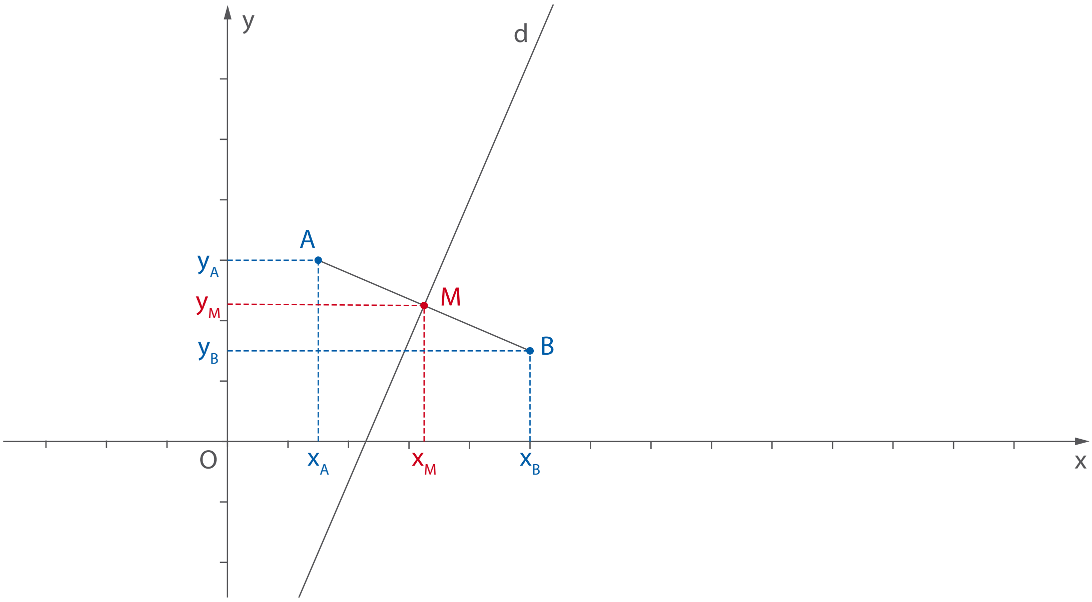
$\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90°$

$\overline{PM} = \overline{PM}$

$\Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.

cqfd

▶ Pour déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB], on procède comme suit :



– on détermine les coordonnées du point M, milieu du segment [AB] :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

– on détermine la pente de la droite AB :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

– on détermine la pente de la médiatrice d :
(la médiatrice d est perpendiculaire à la droite AB)

$$m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

– on détermine l'équation cartésienne de la médiatrice d (la droite perpendiculaire à [AB], donc sa pente est égale à m_d, qui passe par M) :

$$y - y_M = m_d(x - x_M)$$

$$d \equiv y = m_d(x - x_M) + y_M$$

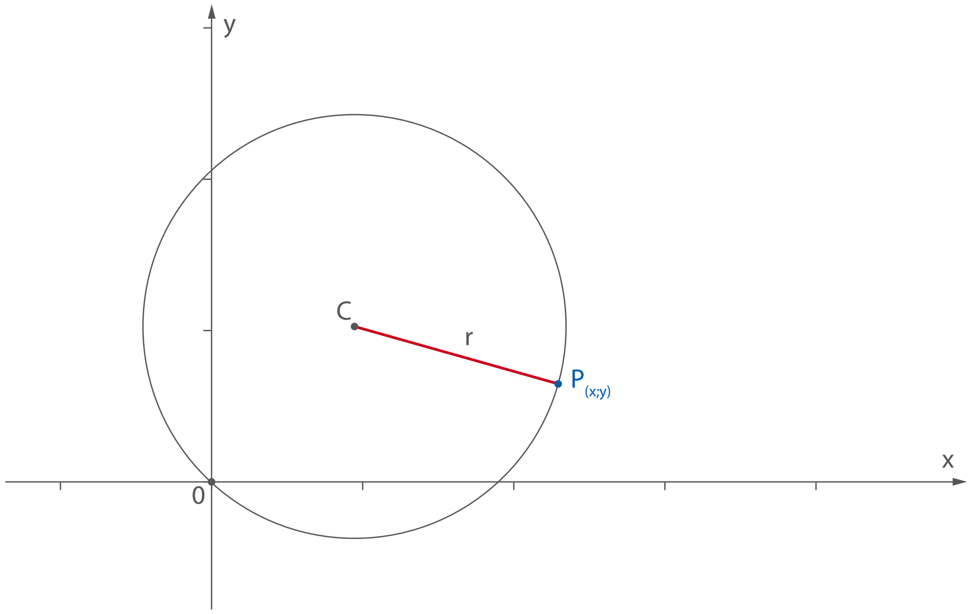
Module 2 : Le cercle – arc capable d'un angle donné

1. LE CERCLE

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon r est le lieu géométrique des points situés à la distance r du point P.

▶ Pour déterminer :

L'équation cartésienne du cercle



P(x;y) est un point de $\mathscr{C} \Leftrightarrow d(C;P) = r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = r, r \in \mathbb{R}_0^+$$

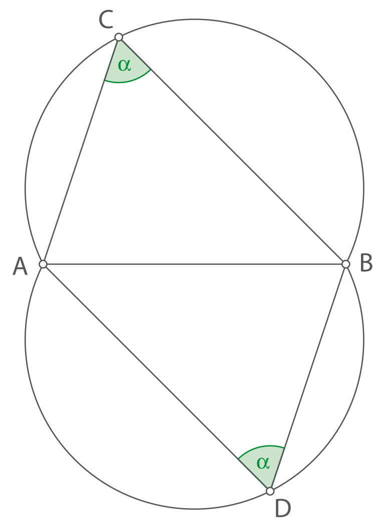
$$\Leftrightarrow (x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 = r^2$$

Donc, dans un repère orthonormé du plan, l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $C(x_C;y_C)$ et de rayon r est donnée par la formule :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

2. ARC CAPABLE D'UN ANGLE DONNÉ

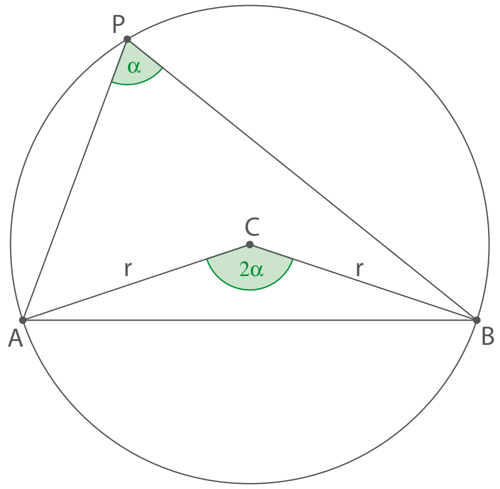
Le segment [AB] et l'angle d'amplitude α étant donnés, **le lieu géométrique des points tels que le segment [AB] est vu sous l'angle d'amplitude α** est formé par l'union de deux arcs de cercle sous-tendus par la corde [AB] et symétriques par rapport à la droite AB, à l'exception des points A et B.



Ces arcs de cercle sont **les arcs capables de l'angle α, construits sur le segment [AB].**

▶ Pour construire un arc capable d'un angle d'amplitude donnée,

il faut déterminer un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon r, dont une corde est [AB] et dans lequel on peut inscrire l'angle α.
L'angle au centre $\widehat{ACB}$ vaut donc 2α.
[AB] et r étant donnés, on construit le triangle isocèle ACB.
Ainsi, les angles à la base du triangle isocèle ABC valent 90° – α.
$\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 90° - \alpha$.

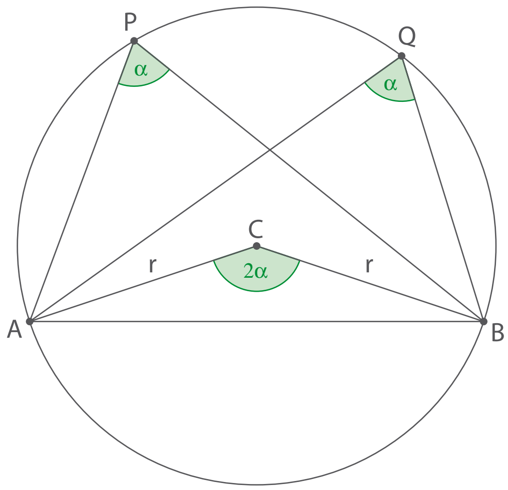


Soit P un point quelconque sur le cercle de centre C et de rayon $r = \overline{CA} = \overline{CB}$.

Il en résulte que $\widehat{APB} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2} = \alpha$.

Remarque

Si $\hat{P} = \hat{Q} = \alpha$, alors les points A, P, Q et B appartiennent au même cercle. Ils s'appellent points cycliques.



Module 3 : La parabole

Une **parabole** est le lieu géométrique des points du plan situés à égale distance d'un point donné et d'une droite donnée, qui ne comprend pas le point donné.
Le point donné est nommé **le foyer** de la parabole, la droite donnée est nommée **la directrice** de la parabole.

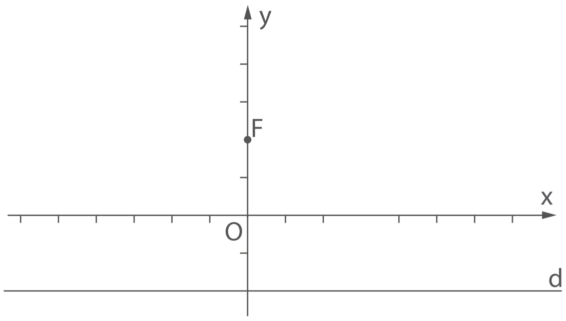
Pour déterminer :

L'équation cartésienne de la parabole

On considère le point F situé à la distance p d'une droite d.

On choisit un repère orthonormé tel que :

– **l'axe des abscisses** soit parallèle à la directrice et situé à mi-distance entre le foyer F et la directrice d ;



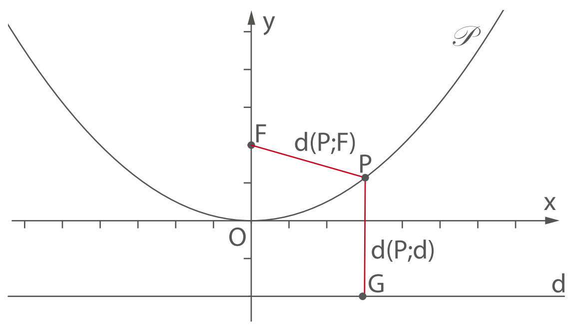
– **l'axe des ordonnées** soit perpendiculaire à d et le foyer d'ordonnée positive lui appartienne ;

– **l'unité** soit la même que celle utilisée pour mesurer la distance de F à d.

Il est évident que dans ce repère, le foyer F est le point de coordonnées $\left(0;\frac{p}{2}\right)$ et la directrice est la droite d'équation $y=-\frac{p}{2}$.

P(x;y) est un point de la parabole $\mathscr{P}$ si et seulement si :

$$d(P;F)=d(P;d)\Leftrightarrow\sqrt{(x_F-x_P)^2+(y_F-y_P)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|^2$$



$$\Leftrightarrow\sqrt{(0-x)^2+\left(\frac{p}{2}-y\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{p}{2}-y\right)^2=\left|y+\frac{p}{2}\right|^2$$

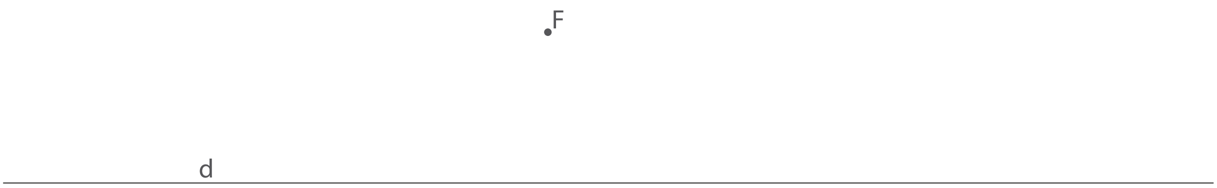
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{p^2}{4}-py+y^2=y^2+py+\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow x^2=2py\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2p}$$

Donc, dans un repère orthonormé du plan, **l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ de foyer $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ et de directrice $d\equiv y=-\frac{p}{2}$** est donnée par la formule :

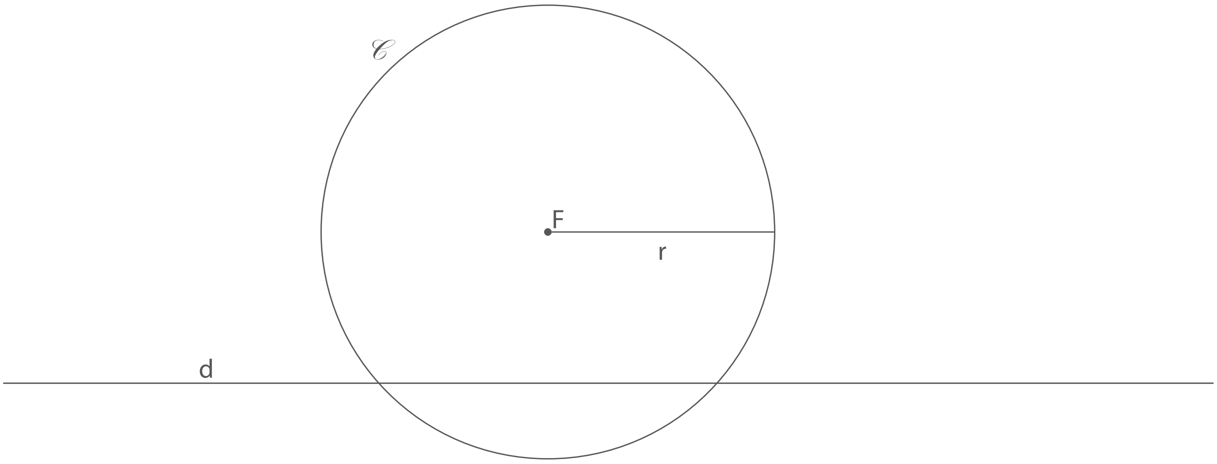
$\mathbf{y=\frac{x^2}{2p}}$ ou $\mathbf{x^2=2py}$.

▶ Pour construire la parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice d :

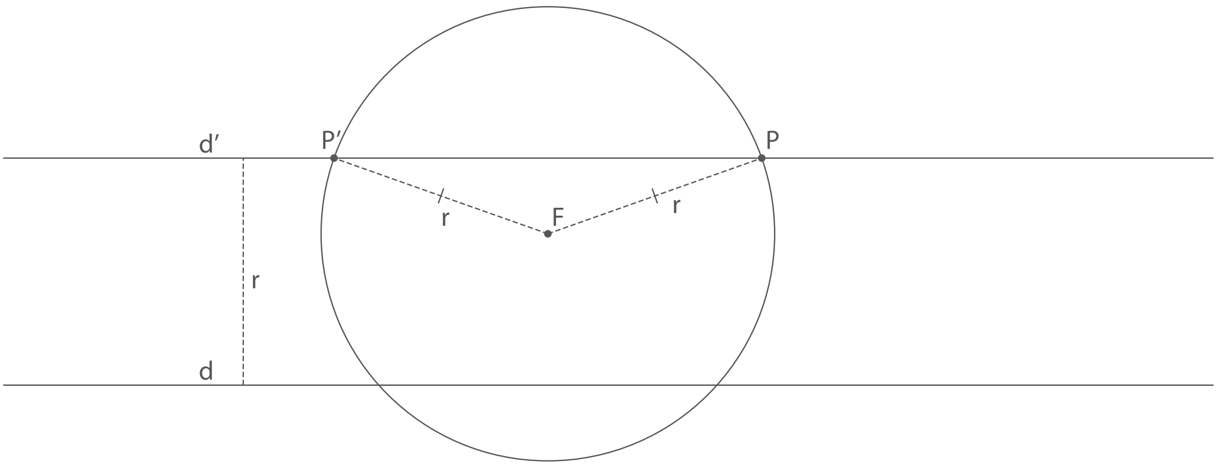
– on place le point F et la droite d, $F \notin d$.



– on trace le cercle de centre F et de rayon $r \geqslant \frac{1}{2}d(F;d)$.



– on trace la droite d′, parallèle à d, à la distance r de d, du même côté de d que F. On sélectionne le(s) point(s) d'intersection de la parabole et du cercle.



– on recommence avec d'autres valeurs de r.