

Les régularités et l'algèbre

CHAPITRE

1

Les régularités

Les élèves commencent à étudier les régularités au début de l'école primaire. À partir des études secondaires, bien que l'accent soit plutôt mis sur l'algèbre, une certaine attention est toujours portée aux régularités.

GRANDES
IDÉES

SUR LES RÉGULARITÉS (GIR)

1. Les suites représentent des régularités bien définies. Il existe toujours une certaine règle, qui concerne soit quelques éléments, soit une « transformation », pouvant consister à ajouter 1, par exemple. (GIR 1)
2. Toute régularité peut être représentée de diverses façons. (GIR 2)
3. Certaines façons de disposer des données mettent en relief des régularités et des relations. (GIR 3)
4. L'utilisation des régularités permet de simplifier un grand nombre de calculs, ainsi que la représentation de mesures et d'attributs géométriques comportant des nombres (par exemple, le nombre de sommets ou de faces des différents prismes). (GIR 4)

Les types de régularités

Les suites à motif répété

L'apprentissage des suites à motif répété qui comprennent plus d'un attribut est approprié pour les élèves de 9 à 14 ans. Par exemple, la suite présentée ci-dessous concerne tant les figures que les couleurs. Il est à noter que les couleurs relèvent d'une suite AAB (bleu, bleu, jaune), tandis que les figures correspondent à une suite AB (cercle, carré).



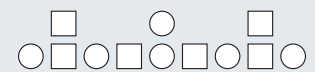
Suite à plusieurs attributs portant sur les figures et les couleurs : AB pour les figures et AAB pour les couleurs.

Connaître les grandes idées peut aider les enseignants à choisir, adapter et créer des tâches, ainsi qu'à formuler des questions qui vont amener les élèves à établir des liens très utiles entre les notions.

Dans chaque rubrique En pratique de la présente section, la ou les grandes idées sur les régularités (GIR) qui peuvent être mises en relief sont précisées.

1.1 EN PRATIQUE

Demandez aux élèves de créer une suite de figures où le nombre de figures dans chaque terme présente une suite ABA, mais où les termes eux-mêmes constituent une suite AB, comme :



1, 2, 1, 1, 2, 1, ...
cercle, carré, cercle, carré, ...

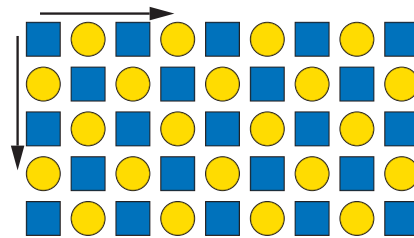
Introduisez la GIR 1 en posant les questions suivantes : Qu'est-ce qui en fait une suite ? Si je changeais cette figure, serait-ce encore une suite ?

Ce qui rend ce type de suite plus approprié pour les élèves de 9 à 14 ans, plutôt que pour les élèves plus jeunes, c'est le fait que les deux attributs sont régis par des motifs répétés différents l'un de l'autre. Les élèves plus jeunes ou ceux ayant des difficultés d'apprentissage sont plus susceptibles de bien comprendre les suites à deux attributs lorsque ces derniers sont régis par une même règle. Par exemple :



Suite à plusieurs attributs portant sur les figures et les couleurs.
Tant les figures que les couleurs relèvent d'une suite AB.

Les élèves de 9 à 14 ans sont également plus aptes à interpréter des suites qui vont dans plus d'un sens, comme dans l'exemple ci-dessous. Ce type de suite est couramment présent dans la vie courante.



Suite de figures et de couleurs

1.2 EN PRATIQUE

Énumérez plusieurs termes (mais pas tous) d'une suite, sauf le premier, comme dans l'exemple ci-dessous. Dites aux élèves que, dans chaque cas, les termes sont additionnés ou soustraits du même nombre chaque fois. Les élèves peuvent alors se servir des termes donnés pour déterminer les termes manquants.

$\left[\underline{5}, \underline{7}, 9, \underline{11}, \underline{13}, 15, \underline{17} \right]$
ou

$\left[\underline{40}, 36, \underline{32}, 28, \underline{24}, 20 \right]$

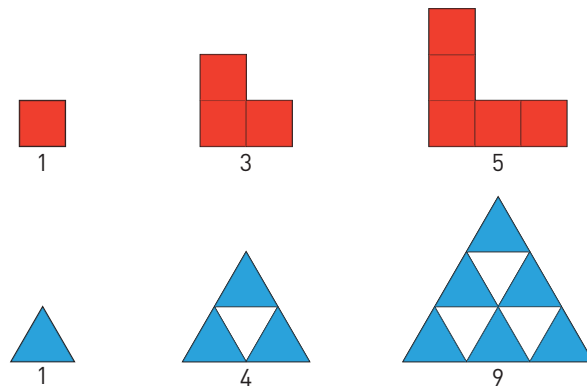
Lorsque les élèves ont terminé, posez-leur les questions suivantes : Comment avez-vous déterminé la règle de soustraction chaque fois ? Pourquoi avez-vous dû faire des additions et des soustractions ?

Les suites croissantes et décroissantes

Certaines suites croissantes sont assez bien connues des élèves, notamment la suite 1, 2, 3, 4, ... À mesure que les enfants acquièrent des notions de mathématiques, ils peuvent observer d'autres suites croissantes (ou décroissantes). Il peut s'agir :

- de suites arithmétiques, où chaque terme est plus élevé ou moins élevé que le précédent selon un nombre fixe
3, 5, 7, 9, ... (additionner 2)
12, 10, 8, 6, ... (soustraire 2) ;
- de suites géométriques, où chaque terme est un multiple fixe du précédent
2, 4, 8, 16, ... (multiplier par 2)
100, 20, 4, ... (diviser par 5 ou multiplier par $\frac{1}{5}$) ;
- d'autres suites numériques où la croissance (ou la diminution) n'est pas constante
3, 4, 6, 9, 13, ... (additionner 1 de plus chaque fois)
20, 18, 14, 8, ... (soustraire 2 de plus chaque fois).

Les élèves sont généralement capables de reconnaître et de prolonger des suites arithmétiques avant d'être à l'aise avec les autres types de suites croissantes ou décroissantes, parce que les progressions arithmétiques se fondent simplement sur l'addition ou la soustraction d'un même nombre chaque fois. Il y a aussi des suites à motif croissant comme le montrent les exemples suivants.



Certaines suites à motif croissant peuvent être vues comme des suites numériques.

Ces suites à motif croissant peuvent souvent être représentées et décrites comme des suites numériques croissantes : 1, 3, 5, ... et 1, 4, 9, ... Il est à noter que chaque progression croissante ou décroissante comporte une règle d'augmentation ou de diminution, ce qui précisément en fait une régularité.

Il faut se rappeler que les élèves éprouvent généralement plus de difficulté avec les suites décroissantes qu'avec les suites croissantes. Il s'ensuit peut-être que nous devons leur consacrer plus de temps que nous le faisons actuellement.

Les suites récursives

Une suite récursive se caractérise par le fait que chacun de ses éléments est défini en fonction d'un ou de plusieurs éléments précédents. Certaines des suites croissantes décrites précédemment peuvent être considérées comme des suites récursives. Par exemple, dans la suite 2, 4, 6, 8, ..., chaque terme est plus grand de 2 que le précédent. Toutefois, certaines suites récursives s'avèrent plus complexes, à l'exemple de 2, 3, 6, 18, 108, ..., où chaque terme est défini comme le produit des deux termes précédents.

Voici quelques suites récursives bien connues :

- les nombres triangulaires : à partir de 1, chaque terme s'obtient en ajoutant 1 de plus que ce qui avait été ajouté précédemment, soit 1, 3, 6, 10, 15, ... (commencer à 1, ajouter 2, puis 3, puis 4, puis 5, ...);
- la suite de Fibonacci : à partir de 1 et 1, chaque terme s'obtient en additionnant les deux précédents, soit 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... (commencer avec 1 et 1, additionner les deux premiers termes pour obtenir le 3^e, puis additionner les 2^e et 3^e termes pour obtenir le 4^e, puis additionner les 3^e et 4^e termes pour obtenir le 5^e, ...).

Prolonger les suites et décrire les régularités

Prolonger les suites

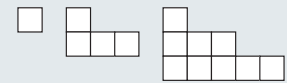
Lorsque les élèves ont reconnu une suite, vous leur demandez normalement de la prolonger ou de la décrire pour vérifier leur compréhension. Il est souvent plus facile pour les élèves de prolonger une suite que de la décrire.

Il y a beaucoup de façons intéressantes d'illustrer la suite 1, 4, 9, ..., y compris

- une suite de carrés de taille croissante, comme ci-dessous :



- une suite en escalier :



Montrez les deux suites.

Expliquez aux élèves qu'il y a différentes façons de représenter la même suite (GIR 2). Une représentation est axée sur le fait que les termes sont des nombres carrés, alors que l'autre souligne la somme de nombres impairs croissants. Demandez aux élèves de trouver une autre représentation [par exemple, la suite de triangles à la droite].

Présentez la GIR 3 en leur posant les questions suivantes : Quelle suite vous laisse penser que les termes sont liés par une multiplication ? Par une addition ? Pourquoi ? [Carrés : je vois 1×1 , 2×2 et 3×3 ; triangles et escaliers : je vois +3, +5.]